

## Contrôle continu n° 2

*Durée 1h20*

**Tous documents, calculatrices et téléphones interdits.  
Une rédaction précise et concise sera récompensée.**

### Questions

1. Rappeler la définition des élément irréductibles dans un anneau intègre. **(0.5p)**
2. Rappeler la définition d'anneau et celle d'anneau principal, puis donner la liste des anneaux principaux que vous connaissez. **(1.5p)**

### Exercice 1

1. Rappeler le théorème des restes Chinois. **(1p)**
2. Justifier (sans le résoudre) que le système

$$\begin{cases} x \equiv 2 [44] \\ x \equiv 5 [9] \end{cases}$$

admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}$ . A-t-on unicité ? **(1p+0.5p)**

3. Résoudre ce système dans  $\mathbb{Z}$ . **(2p)**

### Exercice 2

On pose  $\mathcal{H}$  l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes de la forme :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $\mathcal{H}$  est un sous-anneau de  $M_2(\mathbb{C})$ . **(2p)**
2. Quels sont les éléments inversibles de  $\mathcal{H}$ ? **(1.5p)**
3.  $\mathcal{H}$  est-il commutatif? Est-ce un corps? **(0.5p+0.5p)**

**Tournez SVP»»**

### Exercice 3

Soit l'anneau  $A = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{5} = \{a + \sqrt{5}b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . On définit pour  $x = a + \sqrt{5}b \in A$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$n(x) := a^2 - 5b^2.$$

1. Montrer que pour tout  $x, y \in A$ , on a :  $n(xy) = n(x)n(y)$ . **(1p)**
2. Justifier que  $x \in A$  est inversible si et seulement si  $n(x) \in \{-1, 1\}$ .  
Donner un élément  $x_0$  de  $A$  tel que  $n(x_0) = -1$  **(1p+0.5p)**
3. Si  $k \in \mathbb{N}$  et  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $k^2$  par 4, quelles sont les seules valeurs possibles de  $r$  (donner un exemple pour chaque valeur) ? En déduire qu'il n'existe pas dans  $A$  d'élément  $x$  tel que  $n(x) = \pm 2$ . **(1.5p+1.5p)**
4. Calculer  $n(-2)$ ,  $n(2)$ ,  $n(1 + \sqrt{5})$ ,  $n(1 - \sqrt{5})$ . **(0.5p)**
5. En déduire que  $-2$ ,  $2$ ,  $1 + \sqrt{5}$ ,  $1 - \sqrt{5}$  sont irréductibles dans  $A$ . **(1.5p)**
6. L'élément 2 divise-t-il  $1 \pm \sqrt{5}$  dans  $A$  ? **(0.5p)**
7. L'anneau  $A$  est-il principal ? (indic.  $(-2) \times 2 = (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$ ).  
**(1p)**